Grafik Komputer :
Transformasi Geometri 2 Dimensi

Universitas Gunadarma

2006

Matriks dan Transformasi Geometri

- Representasi umum suatu Matriks adalah : $\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M_{11}} & \mathbf{M_{12}} & \cdots & \mathbf{M_{1n}} \\ \mathbf{M_{21}} & \mathbf{M_{22}} & \cdots & \mathbf{M_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M_{m1}} & \mathbf{M_{m2}} & \cdots & \mathbf{M_{mn}} \end{bmatrix}$

  dimana pada Matriks M_{rc}, r adalah kolom dan c baris.

- Suatu Vektor direpresentasikan sebagai matriks kolom : $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{v_1} \\ \mathbf{v_2} \\ \mathbf{v_3} \end{bmatrix}$

- Perkalian Matriks dan Vektor dapat digunakan untuk transformasi linier suatu vektor.

$$\mathbf{M} \bullet \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & \mathbf{M}_{13} \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{M}_{23} \\ \mathbf{M}_{31} & \mathbf{M}_{32} & \mathbf{M}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_y \\ \mathbf{v}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

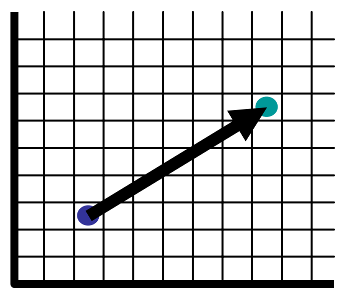
- Suatu sekuens transformasi linier berkorespondensi dengan matriks korespondennya : $M_1 M_2 M_3 v_{old} = v_{new}$

  dimana, Vektor hasil di sisi kanan dipengaruhi matriks transformasi linier dan vektor awal.

- Jadi….. Suatu Transformasi Linier :
  - Memetakan suatu vektor ke vektor lain
  - Menyimpan suatu kombinasi linier

TRANSLASI

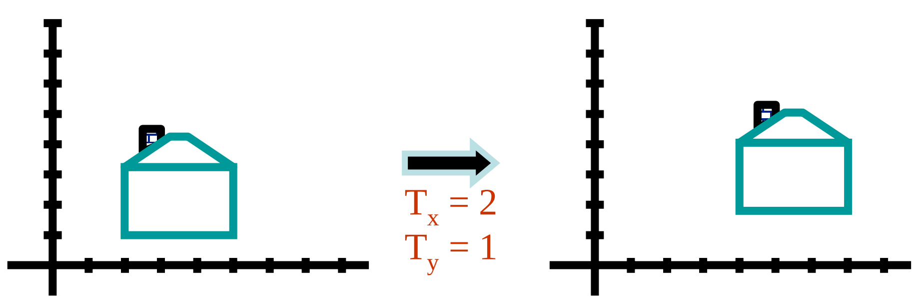
- Translasi adalah suatu pergerakan/perpindahan semua titik dari objek pada suatu jalur lurus sehingga menempati posisi baru.
- Jalur yang direpresentasikan oleh vektor disebut Translasi atau Vektor Geser.
- Pergeseran tersebut dapat ditulis : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$



- Untuk merepresentasikan translasi dalam matriks 3x3 kita dapat menulisnya :

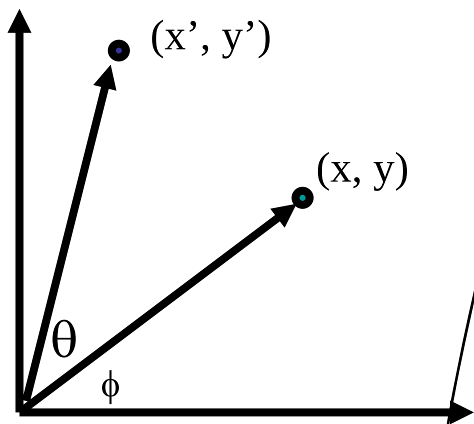
$$\textbf{T}ranslation = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + T_x \\ y + T_y \\ 1 \end{bmatrix}$$



ROTASI

- Rotasi adalah mereposisi semua titik dari objek sepanjang jalur lingkaran dengan pusatnya pada titik pivot.



$$\mathbf{x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)}$$
$$\mathbf{y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta)}$$

$x = r\cos(\Phi)$
$y = r\sin(\Phi)$
$x' = r\cos(\Phi + \theta)$
$y' = r\sin(\Phi + \theta)$

Identitas Geometri…
$x' = r\cos(\Phi)\cos(\theta) - r\sin(\Phi)\sin(\theta)$
$y' = r\sin(\Phi)\sin(\theta) + r\cos(\Phi)\cos(\theta)$

Substitusi…
$x' = x\ \mathbf{cos}(\theta) - y\ \mathbf{sin}(\theta)$
$y' = x\ \mathbf{sin}(\theta) + y\ \mathbf{cos}(\theta)$

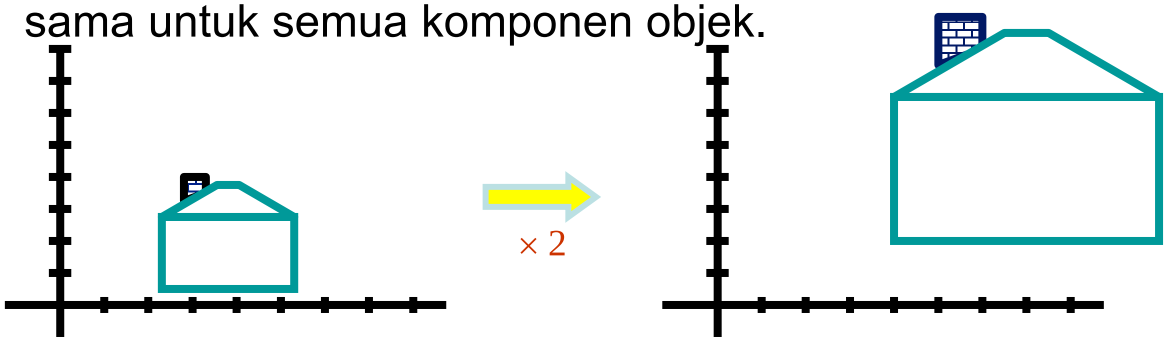
- Untuk memudahkan perhitungan dapat digunakan matriks:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

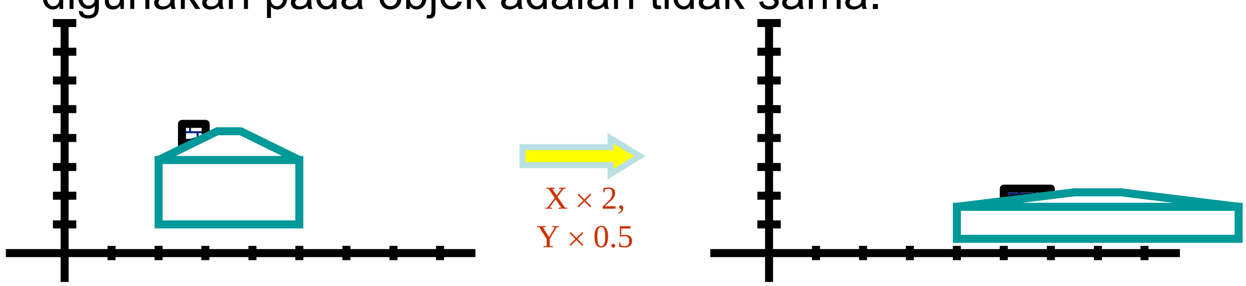
Dimana :
- $\sin(\theta)$ dan $\cos(\theta)$ adalah fungsi linier dari θ,
- x' kombinasi linier dari x dan y
- y' kombinasi linier dari x and y

SKALA

- Penskalaan koordinat dimaksudkan untuk menggandakan setiap komponen yang ada pada objek secara skalar.
- Keseragaman penskalaan berarti skalar yang digunakan sama untuk semua komponen objek.



- Ketidakseragaman penskalaan berarti skalar yang digunakan pada objek adalah tidak sama.



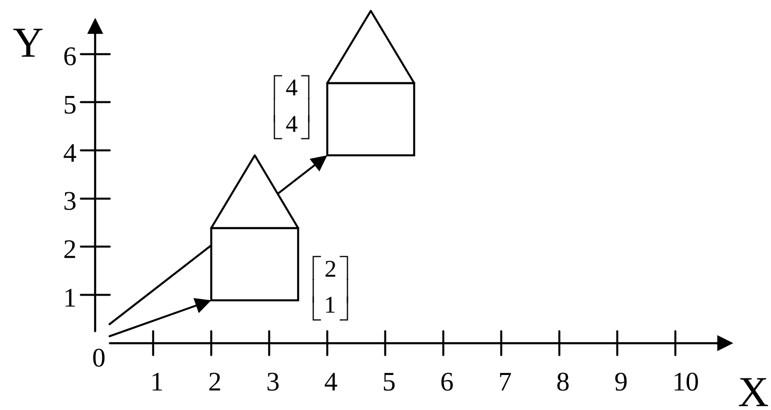
- Operasi Skala : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ by \end{bmatrix}$

atau dalam bentuk matriks : $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

CONTOH

- Translasi :

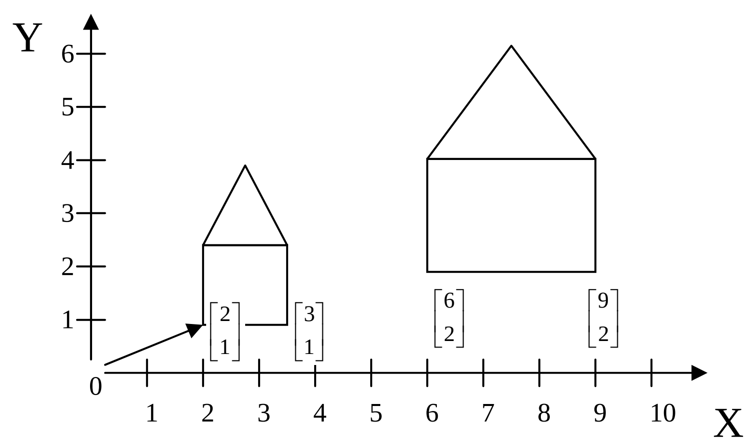
dx = 2
dy = 3



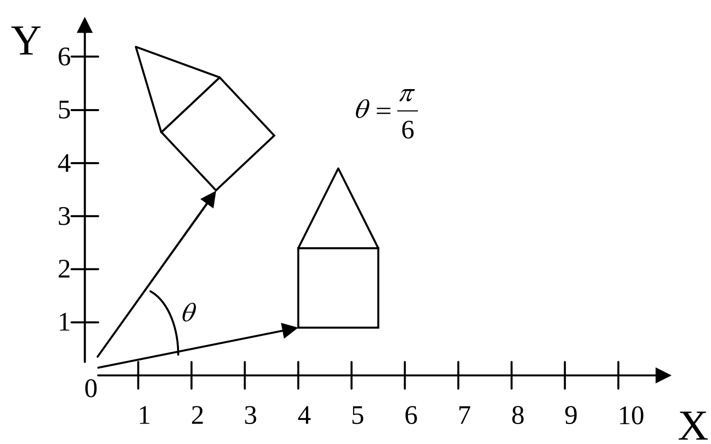
- Skala :

$s_x = 3$

$s_y = 2$



- Rotasi :



Koordinat Homogen

- Koordinat Homogen adalah representasi koordinat 2 dimensi dengan 3 vektor.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{homogeneous coords}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{otation} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Scale = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}ranslation = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformasi Gabungan (1/3)

- Kita dapat merepresentasikan 3 transformasi dalam sebuah matriks tunggal.
  - Operasi yang dilakukan adalah perkalian matriks
  - Tidak ada penanganan khusus ketika mentransformasikan suatu titik : matriks • vector
  - Transformasi gabungan : matriks • matriks

- Tranformasi Gabungan :
  - Rotasi sebagai titik perubahan : translasi – rotasi-translai
  - Skala sebgai titik perubahan : translasi – skala-translasi
  - Perubahan sistem koordinat : translasi – rotasi – skala

- Langkah yang dilakukan :
  1. Urutkan matriks secara benar sesuai dengan transformasi yang akan dilakukan.
  2. Kalikan matriks secara bersamaan
  3. Simpan matriks hasil perkalian tersebut (2)
  4. Kalikan matriks dengan vektor dari verteks
  5. Hasilnya, semua verteks akan ter-transformasi dengan satu perkalian matriks.

Transformasi Gabungan (2/3)

- Perkalian Matriks bersifat Asosiatif :

$$\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) \bullet \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aei+bgi+afk+bhk & aej+bgj+afl+bhl \\ cei+dgi+cfk+dhk & cej+dgj+cfl+dhl \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} ei+fk & ej+fl \\ gi+hk & gj+hl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aei+afk+bgi+bhk & aej+afl+bgj+bhl \\ cei+cfk+dgi+dhk & cej+cfl+dgj+dhl \end{bmatrix}$$

- Perkalian Matriks tidak bersifat Komutatif

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}$$

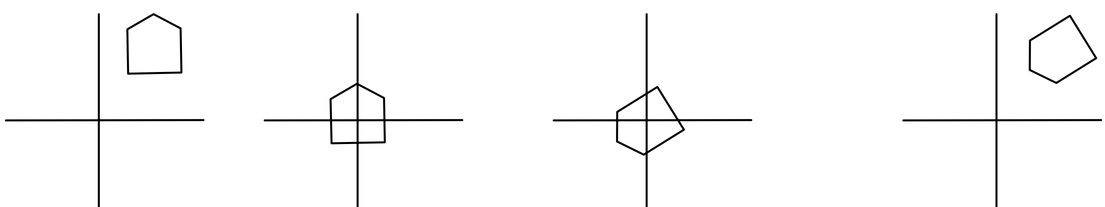
$$\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix}$$

Transformasi Gabungan (3/3)

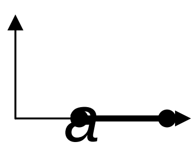
Contoh :

- Jika terdapat objek yang tidak terletak di titik pusat, maka bila akan dilakukan pen-skala-an dan rotasi,kita perlu mentranslasikan objek tersebut sebelumnya ke titik pusat baru kemudian dilakukan pen-skala-an atau rotasi, dan terakhir dikembalikan lagi ke posisi semula.

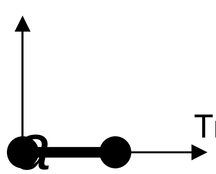
$House\ (H)$ $\quad T(dx,dy)H \quad R(\theta)T(dx,dy)H \quad T(-dx,-dy)R(\theta)T(dx,dy)H$



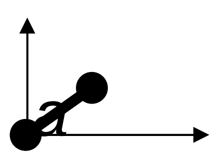
- Rotasikan sebuah segment garis sebesar 45º dengan endpoint pada titik a !
  - Posisi awal a



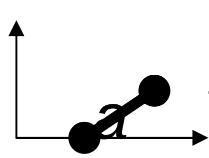
  - Translasi ke titik pusat



  - Rotasi 45º



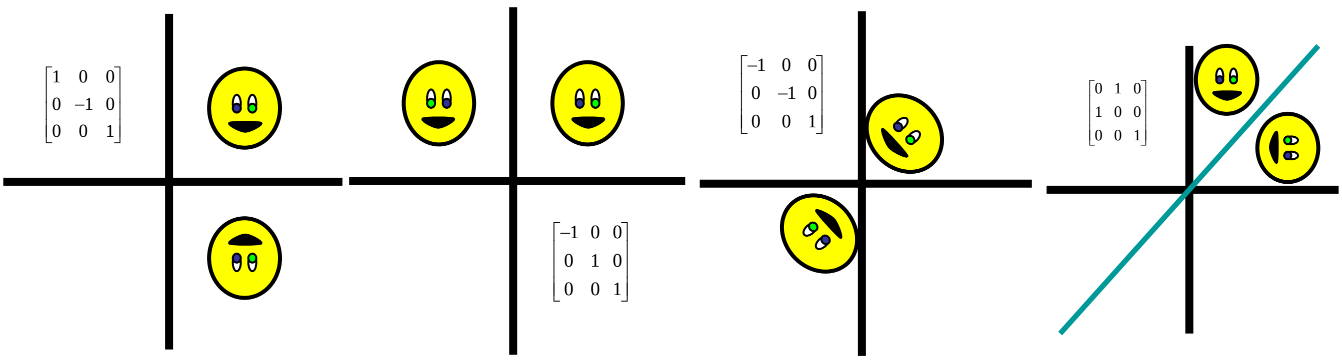
  - Translasi ke titik semula



$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(45) & -\sin(45) & 0\\\sin(45) & \cos(45) & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_x\\a_y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a'_x\\a'_y\\1\end{bmatrix}$$

Transformasi Lainnya

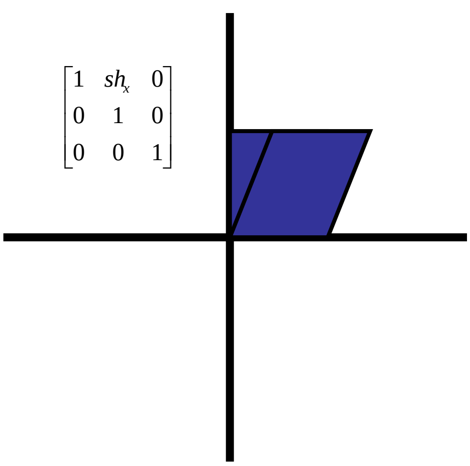
- Refleksi



$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

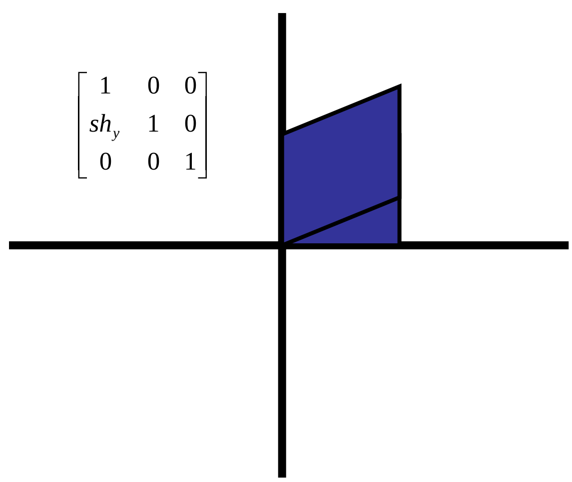
- Shear

Arah x



$$\begin{bmatrix}1 & sh_x & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Arah y



$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\sh_y & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$